Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

11-й класс

Решения

1. Можно ли в выражении

$$2 * 0 * 1 * 2 * 2 * 0 * 1 * 2 * \cdots * 2 * 0 * 1 * 2 = 2013$$

(слева — 2013 групп, каждая из которых состоит из цифр 2, 0, 1, 2) поставить вместо звёздочек знаки сложения и умножения (скобки ставить нельзя) так, чтобы получилось верное равенство?

Ответ: можно.

Решение.

С помощью одной группы можно получить: $0 = 2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2,\ 2 = 2 + 0 \cdot 1 \cdot 2,\ 4 = 2 + 0 + 1 \cdot 2,\ 5 = 2 + 0 + 1 + 2$. Если между группами поставить плюсы, взять 1000 групп по 2, 2 группы по 4, одну группу с 5, а остальные — нулевые, то всё получится.

Замечание. Разумеется, существует масса других способов.

2. Дана квадратная таблица 31×31 (31 строка и 31 столбец). Прямоугольником будем называть любые 4 клетки этой таблицы, если они находятся на пересечении каких-нибудь двух различных строк и каких-нибудь двух различных столбцов. Можно ли заполнить эту таблицу числами ± 1 так, чтобы произведение 4-х чисел любого прямоугольника было отрицательным?

Ответ: нельзя.

Решение.

От противного. Предположим, что такая таблица нашлась. Для каждого прямоугольника вычислим произведение его чисел (оно равно -1), а затем перемножим все полученные результаты. Две строки из 31 можно выбрать $31 \cdot 15$ способами, то же самое для столбцов. Поэтому всего имеем $(31 \cdot 15)^2$ прямоугольников, и итоговое произведение равно -1. С другой стороны, каждое число таблицы появится в итоговом произведении 30^2 раз (так как является «вершиной» $30 \cdot 30$ прямоугольников), которое поэтому равняется произведению всех чисел таблицы в степени 30^2, то есть 1. Противоречие.

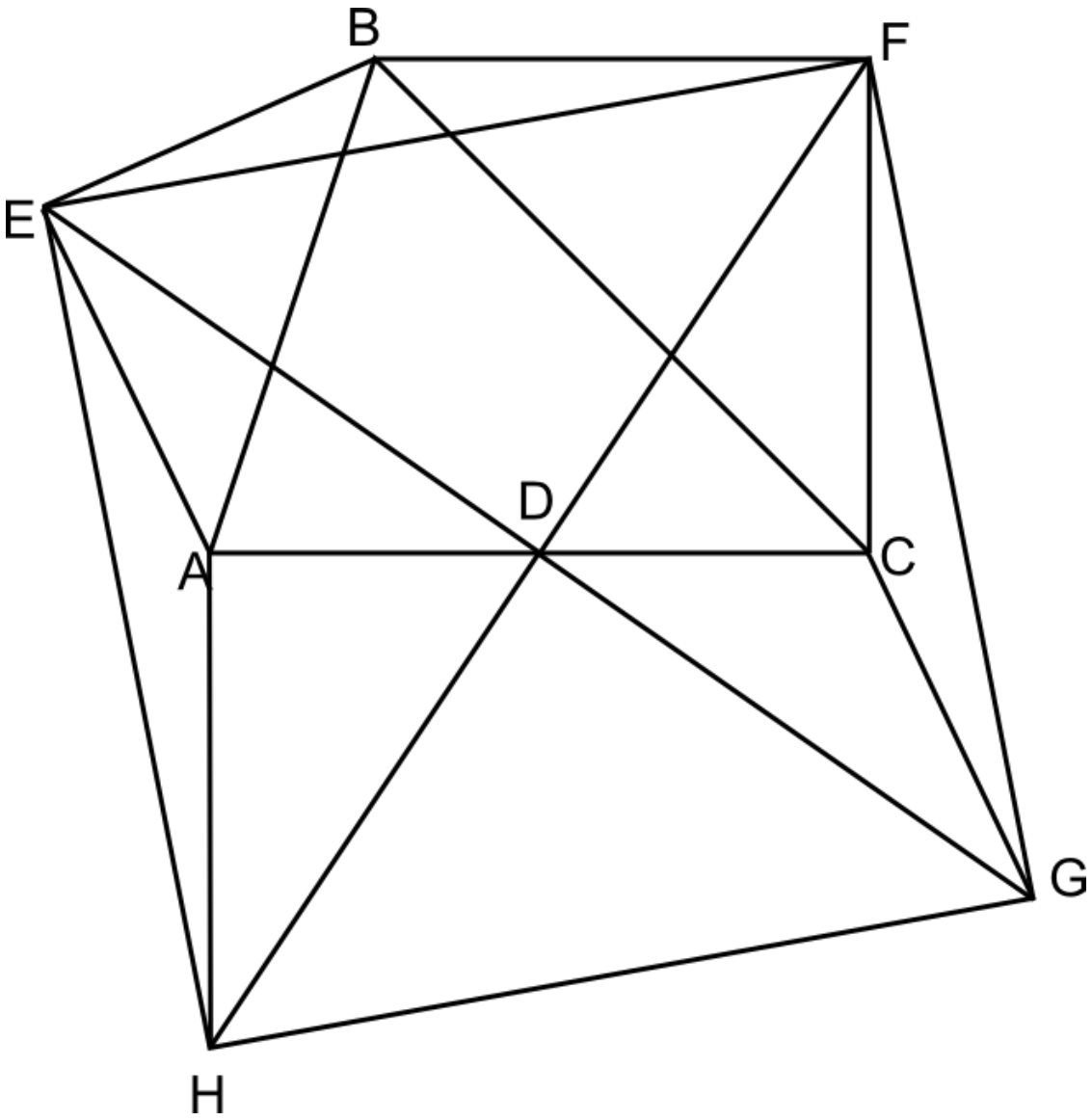
3. Доказать неравенство $x^2z + y^2x + z^2y \geq x^2y + y^2z + z^2x$, если известно, что $x \leq y \leq z$.

Решение.

Собрав все слагаемые слева, получим $(z-y)x^2 + (y^2 - z^2)x + z^2y - y^2z = (z-y)(x^2 - (y+z)x + zy) = (z-y)(x-y)(x-z) \geq 0$, что и требовалось.

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC вне его построены равнобедренные прямоугольные треугольники ABE и BCF с прямыми углами E и F соответственно, D — середина стороны AC. Доказать, что треугольник DEF — равнобедренный прямоугольный с прямым углом D.

Решение.



Пусть точки G и H симметричны соответственно точкам E и F относительно точки D. Тогда $EFGH$ — параллелограмм. Докажем, что треугольники EBF и

GCF равны. В самом деле, $GC = AE = EB$. Первое равенство справедливо, так как $AECG$ — параллелограмм (до конца не прорисованный) по той же причине, что и $EFGH$. Второе следует из определения треугольника ABE. $BF = CF$ из определения треугольника BCF. Далее, для углов получаем $EBF = ABC + 2 \cdot 45°$. $AECG$ — параллелограмм, поэтому $DCG = DAE = BAC + 45°$. Тогда $GCF = 360° - DCG - ACB - 45° = 360° - BAC - 45° - ACB - 45° = 270° - (BAC + ACB) = 270° - (180° - ABC) = 90° + ABC = EBF$. Итак, треугольники EBF и GCF равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $EF = FG$, и параллелограмм $EFGH$ является ромбом. Наконец, угол BFE равен углу CFG, а угол BFC — прямой, откуда и угол EFG — прямой, поэтому ромб $EFGH$ представляет собой квадрат, и мы доказываем требуемое.

Замечание.

Если угол ABC — тупой, чертёж отличается от приведённого выше, но рассуждение остаётся таким же. Если правильно рассмотрен только один из двух случаев, то оценку снижать не следует.

5. Множество целых чисел разбили на две группы. Верно ли, что хотя бы в одной из двух групп найдутся три числа, одно из которых представляет собой среднее арифметическое двух других?

Ответ: верно.

Решение.

Это верно уже для первых девяти натуральных чисел. От противного. Предположим, что построено разбиение на две группы, внутри каждой из которых не существует ни одной тройки чисел, одно из которых представляет собой среднее арифметическое двух других. Группа, в которую попала единица, выделяется подчёркиванием снизу, а вторая — подчёркиванием сверху.
Итак, имеем: $\underline{1}$ 2 3 4 5 6 7 8 9.

СЛУЧАЙ 1: $\underline{1}$ $\underline{2}$ 3 4 5 6 7 8 9. Тогда $\underline{1}$ $\underline{2}$ $\overline{3}$ 4 5 6 7 8 9.
СЛУЧАЙ 1А: $\underline{1}$ $\underline{2}$ $\overline{3}$ $\underline{4}$ 5 6 7 8 9. Тогда последовательно: $\underline{1}$ $\underline{2}$ $\overline{3}$ $\underline{4}$ 5 $\overline{6}$ 7 8 9, $\underline{1}$ $\underline{2}$ $\overline{3}$ $\underline{4}$ 5 $\overline{6}$ $\overline{7}$ 8 9, $\underline{1}$ $\underline{2}$ $\overline{3}$ $\underline{4}$ $\underline{5}$ $\overline{6}$ $\overline{7}$ 8 9. Предпоследнее число нельзя, очевидно, отнести ни к одной из групп.
СЛУЧАЙ 1Б: $\underline{1}$ $\underline{2}$ $\overline{3}$ $\overline{4}$ 5 6 7 8 9. Далее: $\underline{1}$ $\underline{2}$ $\overline{3}$ $\overline{4}$ $\underline{5}$ 6 7 8 9, $\underline{1}$ $\underline{2}$ $\overline{3}$ $\overline{4}$ $\underline{5}$ 6 7 $\overline{8}$ 9, $\underline{1}$ $\underline{2}$ $\overline{3}$ $\overline{4}$ $\underline{5}$ $\underline{6}$ 7 $\overline{8}$ 9, $\underline{1}$ $\underline{2}$ $\overline{3}$ $\overline{4}$ $\underline{5}$ $\underline{6}$ $\overline{7}$ $\overline{8}$ 9. Последнее число нельзя, очевидно, отнести ни к одной из групп.

СЛУЧАЙ 2: $\underline{1}\ \overline{2}\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$.

СЛУЧАЙ 2А: $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \underline{4}\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$. Имеем: $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \underline{4}\ \overline{5}\ 6\ 7\ 8\ 9$, $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \underline{4}\ \overline{5}\ 6\ \overline{7}\ 8\ 9$, $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \underline{4}\ \overline{5}\ \underline{6}\ \overline{7}\ 8\ 9$. Предпоследнее число нельзя, очевидно, отнести ни к одной из групп.

СЛУЧАЙ 2Б: $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \overline{4}\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$. Получаем: $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \overline{4}\ \overline{5}\ 6\ 7\ 8\ 9$, $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \overline{4}\ \overline{5}\ \underline{6}\ 7\ 8\ 9$, $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \overline{4}\ \overline{5}\ \underline{6}\ 7\ \underline{8}\ 9$, $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \overline{4}\ \overline{5}\ \underline{6}\ \overline{7}\ \underline{8}\ 9$. Последнее число нельзя, очевидно, отнести ни к одной из групп.

СЛУЧАЙ 2В: $\underline{1}\ \overline{2}\ \overline{3}\ \underline{4}\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$. Теперь: $\underline{1}\ \overline{2}\ \overline{3}\ \underline{4}\ 5\ 6\ \overline{7}\ 8\ 9$, $\underline{1}\ \overline{2}\ \overline{3}\ \underline{4}\ \underline{5}\ 6\ \overline{7}\ 8\ 9$, $\underline{1}\ \overline{2}\ \overline{3}\ \underline{4}\ \underline{5}\ \overline{6}\ \overline{7}\ 8\ 9$. Последнее число нельзя, очевидно, отнести ни к одной из групп.

Полученное противоречие доказывает требуемое.

6. Пусть длина, ширина и высота некоторого прямоугольного параллелепипеда — натуральные числа. Пусть, далее, V — его объём, S — площадь его полной поверхности, P — его полный периметр (то есть сумма длин всех его 12−и рёбер), p — простое число. Известно, что $V + S + P = p^3 - 8$. Доказать, что данный прямоугольный параллелепипед представляет собой куб.

Решение.

Записав равенство $V + S + P = p^3 - 8$ при помощи длин рёбер $a,\ b,\ c$, получим $abc + 2(ab + ac + bc) + 4(a + b + c) + 8 = p^3$, то есть $(a + 2)(b + 2)(c + 2) = p^3$. Поскольку слева стоит произведение трёх натуральных чисел, каждое из которых не меньше 3, а справа — куб простого числа, постольку по основной теореме арифметики получаем $a + 2 = b + 2 = c + 2 = p$, что и требовалось.